

データを $\{x_i\}$, データ数を n , 平均値を m , 分散を σ , 歪度を s , 尖度を k と書くことにする。

$$m = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - 2mx_i + m^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - 2m(x_i - m) - m^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - m^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^3 \\ &= \frac{1}{\sigma^3 n} \sum (x_i^3 - 3mx_i^2 + 3m^2x_i - m^3) \\ &= \frac{1}{\sigma^3 n} \sum (x_i^3 - 3m(x_i - m)^2 - 3m^2(x_i - m) - m^3) \\ &= \frac{1}{\sigma^3 n} \sum x_i^3 - \frac{3m}{\sigma^3} \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2 - \frac{m^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{1}{\sigma^3 n} \sum x_i^3 - \frac{3m}{\sigma} - \frac{m^3}{\sigma^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^4 \\ &= \frac{1}{\sigma^4 n} \sum (x_i^4 - 4mx_i^3 + 6m^2x_i^2 - 4m^3x_i + m^4) \\ &= \frac{1}{\sigma^4 n} \sum (x_i^4 - 4m(x_i - m)^3 - 6m^2(x_i - m)^2 - 4m^3(x_i - m) - m^4) \\ &= \frac{1}{\sigma^4 n} \sum x_i^4 - \frac{4m}{\sigma} \frac{1}{\sigma^3 n} \sum (x_i - m)^3 - \frac{6m^2}{\sigma^4} \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2 - \frac{m^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{1}{\sigma^4 n} \sum x_i^4 - \frac{4m}{\sigma} s - \frac{6m^2}{\sigma^4} \sigma^2 - \frac{m^4}{\sigma^4} \end{aligned}$$

以上を用いて、ループ 1 回で 4 つの統計量を算出できる。