

開始時から n 試合後のレーティング値を R_n , 他家平均レーティングを \bar{R} とする。東風荘のレーティング変動式は以下である:

$$R_{n+1} - R_n = \frac{1}{5} \left([30, 10, -10, -30] + \frac{\bar{R} - R_n}{60} \right)$$

R_n を移項し、両辺から \bar{R} を引いて整理すると

$$\begin{aligned} R_{n+1} - \bar{R} &= R_n - \bar{R} + [6, 2, -2, -6] + \frac{\bar{R} - R_n}{300} \\ &= \frac{299}{300} (R_n - \bar{R}) + [6, 2, -2, -6] \end{aligned}$$

漸化式を解いて

$$R_n - \bar{R} = \left(\frac{299}{300} \right)^n (R_0 - \bar{R}) + \sum_{k=1}^n [6, 2, -2, -6]_k \left(\frac{299}{300} \right)^{n-k}$$

ここで $R_0 = \bar{R}$ を仮定すると、単に

$$R_n = \bar{R} + \sum_{k=1}^n [6, 2, -2, -6]_k \left(\frac{299}{300} \right)^{n-k}$$

さて、競技者が各順位を平均にとるものと仮定すると、変動値 $[6, 2, -2, -6]$ の分散は 20 である。各試合は独立であることより、これらの和の分散は分散の和であるから

$$\begin{aligned} V(R_n) &= 20 \sum_{k=1}^n \left(\frac{299}{300} \right)^{2(n-k)} \\ &= 20 \frac{1 - \left(\frac{89401}{90000} \right)^n}{1 - \frac{89401}{90000}} \\ &= \frac{1800000}{599} \left(1 - \left(\frac{89401}{90000} \right)^n \right) \end{aligned}$$

以上より、試合数が無限に多くなる場合のレーティング標準偏差は

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1800000}{599} \left(1 - \left(\frac{89401}{90000} \right)^n \right)} \\ &= 600 \sqrt{\frac{5}{599}} \\ &\sim 54.818 \end{aligned}$$

ちなみに、順位分布が極端な場合、分散は最大 36 であり、そのときの値は 73.546 となる。(最小 0 は自明かつ意味がない)