開始時から n 試合後のレーティング値を R_n, 他家平均レーティングを $\overline{R}$ とする。天鳳のレーティング変動式は以下である:

$$R_{n+1} - R_n = \frac{1}{5}\left([30,\ 10,\ -10,\ -30] + \frac{\overline{R} - R_n}{\frac{160}{3}}\right)$$

R_n を移項し、両辺から $\overline{R}$ を引いて整理すると

$$\begin{aligned} R_{n+1} - \overline{R} &= R_n - \overline{R} + [6,\ 2,\ -2,\ -6] + \frac{\overline{R} - R_n}{\frac{800}{3}} \\ &= \frac{797}{800}\left(R_n - \overline{R}\right) + [6,\ 2,\ -2,\ -6] \end{aligned}$$

漸化式を解いて

$$R_n - \overline{R} = \left(\frac{797}{800}\right)^n \left(R_0 - \overline{R}\right) + \sum_{k=1}^{n} [6,\ 2,\ -2,\ -6]_k \left(\frac{797}{800}\right)^{n-k}$$

ここで $R_0 = \overline{R}$ を仮定すると、単に

$$R_n = \overline{R} + \sum_{k=1}^{n} [6,\ 2,\ -2,\ -6]_k \left(\frac{797}{800}\right)^{n-k}$$

さて、競技者が各順位を平均にとるものと仮定すると、変動値 $[6,\ 2,\ -2,\ -6]$ の分散は 20 である。各試合は独立であることより、これらの和の分散は分散の和であるから

$$\begin{aligned} V\left(R_n\right) &= 20 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{797}{800}\right)^{2(n-k)} \\ &= 20 \frac{1 - \left(\frac{635209}{640000}\right)^n}{1 - \frac{635209}{640000}} \\ &= \frac{12800000}{4791}\left(1 - \left(\frac{635209}{640000}\right)^n\right) \end{aligned}$$

以上より、試合数が無限に多くなる場合のレーティング標準偏差は

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{12800000}{4791}\left(1 - \left(\frac{635209}{640000}\right)^n\right)} \\ &= 1600\sqrt{\frac{5}{4791}} \\ &= 51.6882584275947\ldots \end{aligned}$$

ちなみに、順位分布が極端な場合、分散は最大 36 であり、そのときの値は $69.34707568960685\ldots$ となる。(最小 0 は自明かつ意味がない)